

第一章、事件与概率

§1.1. 概率的含义

- 例1.1.11. 抛一枚硬币, “抛到正面”, 频率的极限为 $1/2$.

实验者	投币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
克里奇	10000	5067	0.5067
皮尔逊	24000	12012	0.5005

- 例1.1.12. 投掷一枚色子, “出现1点或2点”, 概率为 $1/3$.

例1.1.13. 抽签/抓阄, “抽到某特定竹签”, 概率为 $1/N$.

- 例1.1.15. 连续抛一枚硬币/色子(放回抽样).

例1.1.16. 连续抽签(不放回抽样).

- 随机试验. 概率: 频率的极限、事件的置信度.

§1.2. 样本空间与事件

- 样本(sample)/样本点: 一个试验结果, ω .
- 样本空间: 所有可能的试验结果组成的集合, 全集, Ω .
- 事件(event): “某些”子集, $A, B, C, \dots$.
- 平凡的事件: Ω (必然事件), $\emptyset$.
- 事件 A 发生: (本次)试验结果 $\omega \in A$.
- 事件: 关于样本的性质或要求.
- 例1.2.2. 连续抛 n 次硬币/抛 n 枚硬币.
 - $n = 2$, $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$.

$$B = \text{“正面数} \geq \text{反面数”} = \{HH, HT, TH\}.$$

- $n = 3$, $\hat{\Omega}$: 长为3 的H-T 字符串.

$$\hat{B} = \text{“正面数} \geq \text{反面数”} = \{HHH, HHT, HTH, THH\}.$$

集合/事件运算:

- 补事件/补集/余集, A^c .
- 并事件/并集: $A \cup B$.
- 交事件/交集: $A \cap B$, AB .
- A 与 B 不相交/不相容: $AB = \emptyset$.
- 差事件/差集: $A \setminus B$.
- 交换律、结合律、分配律、对偶律, 维恩图.

一族子集的并集与交集:

- 并事件/并集:

- 有限个:

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = \{\omega : \exists 1 \leq i \leq n \text{ 使得 } \omega \in A_i\}.$$

- 可列个: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := \{\omega : \exists i \geq 1 \text{ 使得 } \omega \in A_i\}.$

- 任意个: $\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega : \exists i \in I \text{ 使得 } \omega \in A_i\}.$

- 交事件/交集:

- 有限个: $A_1 \cap \cdots \cap A_n,$

$$A_1 \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i = \{\omega : \omega \in A_i, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

- 可列个: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := \{\omega : \omega \in A_i, \forall i \geq 1\}.$

- 任意个: $\bigcap_{i \in I} A_i := \{\omega : \omega \in A_i, \forall i \in I\}.$

- 交换律、结合律、分配律、对偶律.

极限:

- 若单调上升: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, 则令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

- 若单调下降: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, 则令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

- $\bigcup_{i=1}^n A_i \nearrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i \searrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$

§1.3 古典概率模型

- 有限样本空间: $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

事件 A 的概率定义为

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

- 基于“对称性”假设, 或“公平性”假设.
- 不重不漏地数数: A_n^m, C_n^m .
- 抽样模型:
放回抽样、不放回抽样、抽取与顺序无关、随机分组.
- 若尔当(Jordan)公式.
- 放球模型:
球可分辨、混排模型(球不可分辨).

例1.3.5 (抽取与顺序无关) 现有 N 个产品, 其中 M 个是次品, 其余 $N - M$ 个是合格品. 将所有产品随机地一个一个取出并进行检验. 求前 n 个产品中恰有 m 个次品的概率.

- 产品编号, 次品: $1, \dots, M$, 合格品: $M + 1, \dots, N$.
- 目标: 把所有产品全排列, $|\Omega| = N!$.
- 建模1: 先为第1 个位置挑号码 $i_1, \dots$.
 $\omega = (i_1, \dots, i_N)$.
- 建模2: 先为第 n_1 个位置挑号码 $j_1, \dots$.
- 建模3: 先为第1 号产品挑位置 $k_1, \dots$.
- 建模4: 先为第 N 号产品挑位置, $\dots$.

例1.3.15(匹配问题). 现有 n 双不同颜色的鞋, 将它们随机地进行左右配对. 求没有匹配成功的鞋的概率.

- 建模: 将鞋编号, 左鞋随机全排列, 与右鞋配对.

- $B_i =$ “队列中排第 i 的左鞋的颜色编号为 i ”, $P(B_i) = \frac{1}{n}$.

- $P(B_{i_1} \cdots B_{i_k}) = \frac{1}{n(n-1) \cdots (n-k+1)} = \frac{(n-k)!}{n!}$.

- 若尔当公式, $B := B_1 \cup \cdots \cup B_n$ 的概率为

$$P(B) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(B_{i_1} \cdots B_{i_k}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k \cdot \frac{(n-k)!}{n!}.$$

- $A =$ “没有匹配成功的鞋”,

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

- 特别地, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $P(A) \rightarrow e^{-1}$.

例1.3.14 (混排模型) 将 n 位女生与 m 位男生随机排成一列, 求任意两位女生都不相邻的概率. ($m \geq n - 1 \geq 1$.)

- $(n + m)! = C_{n+m}^n n! m!$.
- 方法二. 将女生标记为“1”, 男生标记为“0”, 得到 0-1 字符串, 其中含 n 个1 和 m 个0.
- 球不可分辨的放球模型: 将 m 个不可分辨的球放入 $n + 1$ 个盒子中. 样本同上.
- A = 不出现“11”的片段.
- $\tau: A \rightarrow \hat{A}$, 每两个1 之间去掉一个字符0,
 $\hat{A}$: 0-1 字符串, 其中含 n 个1 和 $m - (n - 1)$ 个0.
- τ 为一一对应, 故 $|A| = |\hat{A}| = C_{m+1}^n$.
- $P(A) = C_{m+1}^n / C_{n+m}^n$.

§1.4 几何概率模型

- 例1.4.1. (离散化逼近) 设 $0 < a < b \leq 1$. 在 $(0, 1]$ 中随机取出一个数, 求它落在区间 $(a, b]$ 中的概率.
- 几何概率模型:
 Ω 为 d 维区域, $|\Omega| < \infty$, A 为 Ω 的子区域,
“事件” A 的概率定义为

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

例1.4.6. (贝特朗(Bertrand)悖论) 在单位圆周上随机取一条弦.

$A = \text{“弦长大于}\sqrt{3}\text{”}$, 求 $P(A)$.

● 三种解法.

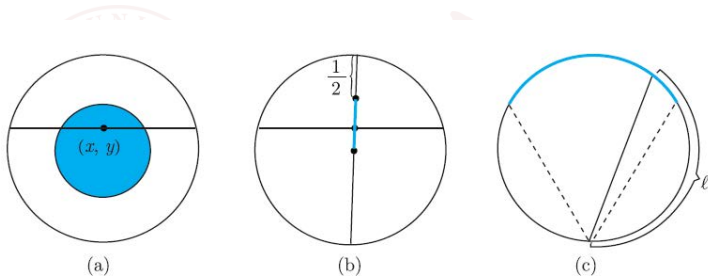


图 1.3

● 概率: 权分配方案.

§1.5 概率空间

一、 σ 代数

- 例1.5.1. $\Omega = \{R, O, Y, G, B, P\}$.
 - 能否统计每个面出现的频率?
 - 能统计哪些事件出现的频率?
 - $\{O\}$ 可测, $\{R, B\}$ 不可测.
 - $\mathcal{G} = \{A : R, G \in A, \text{ 或 } R, G \in A^c\}$, 可测集, 事件.
- 定义1.5.2. 设 Ω 是样本空间, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}_\Omega = \{A : A \subseteq \Omega\}$. 若
 - (1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - (2) 补运算封闭: $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
 - (3) 可列并运算封闭: $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$,

则称 $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的 σ 代数/事件域, 称 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间.

若 $A \in \mathcal{F}$, 则称 A 为事件, (关于 $\mathcal{F}$) 可测.

- 最小的 σ 代数: $\{\emptyset, \Omega\}$; 最大的 σ 代数: $\mathcal{T}_\Omega$.
- $\mathcal{A}$ 生成的 σ 代数: 包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ 代数,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{G} \text{ 是 } \sigma \text{ 代数, } \mathcal{G} \supseteq \mathcal{A}} \mathcal{G}.$$

- 例1.5.5. (离散型). $A_i, i \in I$, 是 Ω 的(可数)划分, 其中 $I = \{1, \dots, n\}$ 或 $\{1, 2, \dots\}$.

$$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}, \quad \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i : J \subseteq I \right\}.$$

称 $A_i, i \in I$, 为基本事件/基本集.

例1.5.6. Borel σ 代数: 开集生成的 σ 代数.

$$\bullet \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{R}),$$

$$\mathcal{P} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{Q} = \{(a, b] : \dots\}, \quad \mathcal{R} = \{(a, b) : \dots\}.$$

• 没有“基本事件”:

$$\bullet \{x\} \in \mathcal{B}, \forall x.$$

$$\bullet \mathcal{A} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}, \text{ 求 } \sigma(\mathcal{A}).$$

$$\bullet \mathcal{B}([0, 1]) = \{B \cap [0, 1] : B \in \mathcal{B}\}.$$

$$\bullet \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{P}_d) = \sigma(\mathcal{Q}_d) = \sigma(\mathcal{R}_d) = \sigma(\mathcal{S}_d),$$

$$\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{i=1}^d (-\infty, a_i] : a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{S}_d = \{B(\vec{x}, r) : \vec{x} \in \mathbb{R}^d, r > 0\}.$$

二、概率的定义及其性质

- 概率: 权分配方案. 数学对象: 事件的函数 $P : A \mapsto P(A)$.
- 频率/古典/几何概型:

(1) 非负性: $P(A) \geq 0$.

(2) 规范性: $P(\Omega) = 1$, 归一化.

(3) 可加性: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

(4) 下连续性: 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, 则

$$P\left(\lim_n A_n\right) = \lim_n P(A_n).$$

- 引理1.5.7. 设 $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足(1), (2), 则(3) & (4) $\Leftrightarrow$ (5),

(5) 可列可加性: 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$, 两两不交, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

(5) 可列可加性 $\Rightarrow$ (3) 可加性, (4) 下连续性 的证明.

- 取 $A_n = \emptyset, \forall n$ 推出 $P(\emptyset) = 0$.
- 取 $A_m = \emptyset, \forall m \geq n + 1$ 推出 (3) 可加性.
- 设 $A_1, A_2, \dots$ 是一列事件.

令 $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, 则 $B_1, B_2, \dots$ 两两不交.

- $A_1 \cup \dots \cup A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$,
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, 而由 $\star\star$, $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$.

- 又设 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$,

则 $B_1 = A_1; \forall n \geq 2, B_n = A_n \setminus A_{n-1}, A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$;

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

● 定义1.5.8. 设 $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

(1) 非负性: $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$,

(2) 规范性: $P(\Omega) = 1$,

(3) 可列可加性: 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$, 两两不交, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称 P 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ (或 Ω) 上的概率, 称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间.

● 注1.5.9. 测度: $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$, 满足非负性, 可列可加性.

● Ω : 样本空间; $(\Omega, \mathcal{F})$: 可测空间; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 概率空间.

● 以概率 p 发生: $P(A) = p$;

几乎必然/以概率1 发生: $P(A) = 1$;

零概率事件/零测集: $P(A) = 0, \mu(A) = 0$;

正概率事件: $P(A) > 0$.

补充知识2. 勒贝格测度与几何概型.

- $B \in \mathcal{B}$, $x \in \mathbb{R}$, 记 $B + x = \{y + x : y \in B\}$.
- 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上存在唯一的测度 λ (勒贝格测度) 满足

$$\lambda([a, b]) = b - a, \quad \lambda(B) = \lambda(B + x), \quad \forall B \in \mathcal{B}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- 例. $[0, 1]$ 上的几何概型指:

$$\Omega = [0, 1], \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1]), \quad \mathbf{P} = \lambda|_{[0, 1]}.$$

- 取 $\mathcal{F} = [0, 1]$ 上所有 Lebesgue 可测集亦可.
- 取 $\mathcal{F} = 2^{[0, 1]}$? (可以证明, 存在非 Lebesgue 可测集.)
- d 维类似.

概率的性质(命题1.5.10及其推论):

- 次可列可加性: $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$

- $P(A_n) = 0, \forall n \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0;$

$$P(A_n) = 1, \forall n \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

- 若尔当(Jordan)公式:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}). \end{aligned}$$

例1.5.14. 离散型概率空间.

- $\Omega = \{\omega_i : i \in I\}$ 可数, $I = \{1, \dots, n\}$ 或 $\{1, 2, \dots\}$.
- $\mathcal{F} = \mathcal{I}_\Omega$, $\mathcal{A} = \{\{\omega_i\} : i \in I\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$.
- 分布列 $\{p_i : i \in I\}$: $p_i \geq 0, \forall i$; $\sum_{i \in I} p_i = 1$.
- $P(\{\omega_i\}) = p_i, \forall i \Leftrightarrow P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i, \forall A \in \mathcal{F}$.
- 设 $\hat{\mathcal{A}} = \{A_i : i \in I\}$ 为 $\hat{\Omega}$ 的划分, $\hat{\mathcal{F}} = \sigma(\hat{\mathcal{A}})$, 将基本集 A_i 视为 $\{\omega_i\}$ 即可.

例1.5.15. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{T}_\Omega$. 取 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$.
求所有满足 $P(A) = P(B) = 1/2$ 的概率.

- 求分布列 $\{p_i : i = 1, 2, 3, 4\}$, 满足

$$p_1 + p_2 = 1/2, \quad p_1 + p_3 = 1/2.$$

- 解得 $p_1 = p_4 = a$; $p_2 = p_3 = \frac{1}{2} - a$, $a \in [0, 1/2]$.
- 令 $\mathcal{A} = \{A, B\}$. $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$, 但 $P|_{\mathcal{A}} \rightarrow P$ 的扩张不唯一.
- π 系: 非空; 若 $A, B \in \mathcal{A}$, 则 $AB \in \mathcal{A}$.

定理: $\mathcal{A}$ 是 π 系, 则 $P|_{\mathcal{A}} \rightarrow P$ 的扩张(若存在, 则)是唯一的.

- 推论1.5.16. 设 μ_1 与 μ_2 都是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上的分布/概率测度.

若 $\mu_1|_{\mathcal{P}} = \mu_2|_{\mathcal{P}}$, 则 $\mu_1 \equiv \mu_2$.

- 注: $\mathcal{P} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$.

- $\mu|_{\mathcal{P}}$: $F(x) = \mu((-\infty, x])$ 为分布函数(满足相容性):

$$F \nearrow; \quad F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1; \quad F(x+) = F(x),$$

则 $\mu|_{\mathcal{P}} \rightarrow \mu$ 的扩张存在.

§1.6 条件概率

一、条件概率的定义

- 定义1.6.1. 设 $A \in \mathcal{F}$ 且 $P(A) > 0$. 对任意 $B \in \mathcal{F}$, 称 $P(AB)/P(A)$ 为在 A 发生的条件下 B 的条件概率, 记为 $P(B|A)$ 或 $P_A(B)$.
- 在“范围” A 内, “性质” B 的权重的相对百分比.

例1.6.2. 有10个球, 5个玻璃球(2黑, 3红), 5个木球(4黑, 1红).
从中任取一个. 已知抓到黑球. 求此球是玻璃球的条件概率.

- $|A| = 6, |AB| = 2, |AB|/|B| = 2/6.$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{|AB|/|\Omega|}{|A|/|\Omega|} = \frac{|AB|}{|A|} = \frac{1}{3}.$$

- $P(B|A^c) > P(B) > P(B|A^c).$

- $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\},$
辨色能力.

- $P(A|B) < P(A) < P(A|B^c).$

- $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\},$
触觉能力.

	玻璃	木质	
黑	2	4	6
红	3	1	4
	5	5	10

- 命题1.6.3. $P_A(\cdot) = P(\cdot|A)$ 满足概率定义的三个条件.

- 新的权重分配方案, $P_A(B) = \frac{1}{P(A)}P(AB)$,

(1) 在 A 之外: 权重不分给 A^c ;

(2) 在 A 之内: 新的权分配与原始权分配成正比.

对任意 $B \subseteq A$, $P_A(B) = \alpha P(B)$. 其中 $\alpha = 1/P(A)$.

- 已知 A 发生, 假设 A 成立, 若 A 发生, 在 A 中, …… , 之后的“概率”指条件概率 P_A , 而不是原始概率 P .
- 应用一、按照定义直接计算 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$.

例. 若 P 是古典概型, 则 P_A 是以 A 为样本空间的古典概型.

- 应用二、乘法公式.

二、乘法公式

- 分析 P_A : 在假设 A 发生时, 简化模型, 获得 $P(B|A)$.

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

- n 个事件的乘法公式:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdots A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots \\ &\quad \cdot P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

例1.6.8. 波利亚坛子(Polya Urn):

最初有 b 个黑球, r 个红球. 每次取一个, 放回并放入 c 个同色球.

- $c = 0$: 放回抽样;

$c = -1$: 不放回抽样, 最多操作 $b + r$ 次.

- 操作五次, 求(1) $P(B_1 R_2 R_3 B_4 R_5)$; (2) $P(B_5)$, 其中

B_n = “第 n 次抽到黑球”, $R_n = B_n^c$.

- 解: $\underline{BRRBR} = B_1 R_2 R_3 B_4 R_5$, $\underline{RRBRB} = R_1 R_2 B_3 R_4 B_5$.

- (1) $P(\underline{BRRBR})$:

$$\frac{br(r+c)(b+c)(r+2c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)(b+r+3c)(b+r+4c)}.$$

- $P(\underline{RRBRB})$:

$$\frac{r(r+c)b(r+2c)(b+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)(b+r+3c)(b+r+4c)}.$$

- 可交换性: BRRBR, RRBRB, RBRBR, BRRRB, ...
这 C_5^2 个事件的概率都相等.
- $c = -1$ 时即为抽取与顺序无关(例1.3.5).
- B_5 可划分为 $L_1 L_2 L_3 L_4 B$, 其中 $L_i \in \{B, R\}$.
- $P(L_1 L_2 L_3 L_4 B) = P(B L_1 L_2 L_3 L_4)$.
- $B L_1 L_2 L_3 L_4$, ($L_1, L_2, L_3, L_4 \in \{B, R\}$), 为 B_1 的划分.
- $P(B_5) = b/(b+r)$:

$$\begin{aligned}
 P(B_5) &= \sum_{L_i \in \{B, R\}, i=1,2,3,4} P(L_1 L_2 L_3 L_4 B) \\
 &= \sum_{L_i \in \{B, R\}, i=1,2,3,4} P(B L_1 L_2 L_3 L_4) = P(B_1) = \frac{b}{b+r}.
 \end{aligned}$$

例1.6.9. 现有 n 双不同颜色的鞋, 将它们随机地进行左右配对.
求恰有 k 双匹配成功的概率.

- 将 A_k 按是哪 k 双匹配成功划分为 $B_i, i = 1, \dots, C_n^k$.
- $B_1 = CD$, 其中 $C =$ “前 k 双匹配成功”,
 $D =$ “后 $n - k$ 种颜色的鞋均匹配不成功”.

- $P(C) = \frac{(n - k)!}{n!}.$

- $P(D|C) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \frac{1}{j!},$ (参见例1.3.15.)

- $P(A_k) = C_n^k P(B_1) = C_n^k P(C) P(D|C) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \frac{1}{j!}.$

- 令 $p_{n,k} = P(A_k)$, 则 $kp_{n,k} = p_{n',k'},$ 其中 $x' = x - 1$.

$$\text{故 } \sum_{k=0}^n kp_{n,k} = \sum_{k=1}^n kp_{n,k} = \sum_{k'=0}^{n'} p_{n',k'} = 1.$$

三、条件概率 $P_A(\cdot)$ 的条件概率

- $P_A(C|B) = P(C|AB)$:

$$P_A(C|B) = \frac{P_A(BC)}{P_A(B)} = \frac{P(ABC)/P(A)}{P(AB)/P(A)} = P(C|AB).$$

§1.7 全概率公式和贝叶斯公式

一、全概率公式

- 非平凡划分: $\{A_i : i \in I\}$ 是 Ω 的一个可数划分且 $P(A_i) > 0$.
- 定理1.7.1(全概率公式).

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P(B|A_i).$$

- 证: $P(B) = \sum_{i \in I} P(BA_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)P(B|A_i)$.
- 思想: 分情况讨论.
- 划分可改为要求 $P(A_i A_j) = 0, \sum_{i \in I} P(A_i) = 1$.

例1.7.4. 将52 张牌随机均分两组. 从第一组中取一张(下称“旧牌”), 发现它是K, 将之放入第二组. 再从第二组(共27 张牌)中取出一张(下称“新牌”), 求新牌是K的概率.

- 错误解答: 记 $A_n =$ “第二组原有的26张牌中有 n 张K”.

$$P(A_n) = \frac{C_4^n C_{48}^{26-n}}{C_{52}^{26}}, \quad P(B|A_n) = \frac{n+1}{27}.$$

所求为 $P(B) = \sum_{n=0}^3 \frac{C_4^n C_{48}^{26-n}}{C_{52}^{26}} \cdot \frac{n+1}{27}.$

- $A =$ “旧牌是K”, $B =$ “新牌是K”, 所求为 $P_A(B)$.
- 在 A 发生的条件下, 新模型为: 将51 张牌(仅3 张K)随机均分两组(25 + 26), 从旧牌与第二组(共27 张牌)中取出新牌.

- 方法一、

$$P_A(A_n) = \frac{C_3^n C_{48}^{26-n}}{C_{51}^{26}}, \quad P_A(B|A_n) = \frac{n+1}{27}.$$

故

$$P_A(B) = \sum_{n=0}^4 P_A(A_n)P_A(B|A_n) = \cdots = \frac{43}{459}.$$

- 方法二、 $C =$ “新牌即为旧牌”.

$$P_A(C) = \frac{1}{27}, \quad P_A(B|C) = 1;$$

$$P_A(C^c) = \frac{26}{27}, \quad P_A(B|C^c) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}.$$

故

$$P_A(B) = \frac{1}{27} + \frac{26}{27} \cdot \frac{1}{17} = \frac{17+26}{27 \cdot 17} = \frac{43}{27 \cdot 17}.$$

例1.7.5. 在波利亚坛子模型中, 求 $P(B_n)$.

- 取定 c . 模型参数为 b, r 时, 答案记为 $f(b, r; n)$.
- 首步分析法: 由全概率公式,

$$f(b, r; n) = \frac{b}{b+r} \cdot f(b+c, r; n-1) + \frac{r}{b+r} \cdot f(b, r+c; n-1).$$

- $n=1$ 时, $f(b, r, 1) = \frac{b}{b+r}$.
- 用数学归纳法验证: $f(b, r; n) = \frac{b}{b+r}$.

$$f(b, r; n) = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b+c}{(b+c)+r} + \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b}{b+(r+c)} = \frac{b}{b+r}.$$

例1.7.7(三门问题). n 扇门, m 扇后有奖, $n - m$ 扇空门,
 $1 \leq m \leq n - 2$. 先猜一扇(旧门), 然后主持人在剩余的空门中随
机选一扇打开. 以下哪个策略好?

策略1: 坚持选旧门.

策略2: 在旧门和主持人打开的门之外随机选一扇新门.

- 用全概公式解答.
- 建模, 计算每个样本的权重.
- 在模型中解释旧门与新门不对等.

二、贝叶斯公式

- 定理1.7.9(贝叶斯公式). 设 $\{A_i : i \in I\}$ 是 Ω 的非平凡划分.
若 $P(B) > 0$, 则

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j \in I} P(A_j)P(B|A_j)}.$$

- 推导/计算: $P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)}$ & 乘法公式& 全概公式.
- 划分可改为要求 $P(A_i A_j) = 0, \sum_{i \in I} P(A_i) = 1$.
- 逆概率公式, 先验概率 vs 后验概率.
- B 是显明的, A_i 是隐藏的.

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}. A_i \in \mathcal{F}, \text{ 但 } A_i \notin \mathcal{G}.$$

例1.7.10. 用某检测法, 患病者测出阳性的概率为 $a = 0.95$; 非患者测出阴性的概率为 $b = 0.9$. 某人在患病人数比例为 $p = 0.001$ 的地区, 其检测报告为阳性. 试问: 他患病的概率是多大?

- 记 $A = \text{“患病”}$, $B = \text{“检测报告为阳性”}$.
- $P(A) = p$, $P(B|A) = a$, $P(B|A^c) = 1 - b$.
- 由贝叶斯公式,

$$P(A|B) = \frac{pa}{pa + (1-p)(1-b)} = \frac{pa}{p(a+b-1) + (1-b)}.$$

- 代入具体的值后得到 $P(A|B) = 0.00942$.
- $f(p) = \frac{pa}{p(a+b-1) + (1-b)}$ 关于 p ↗.
- 思考题: 若再次复查是阳性, 此人有肝癌的概率是多少?

§1.8 独立性

一、事件的独立性

- 例1.8.1. N 个产品, 其中 M 个是次品. 放回/不放回抽取两次, 求在第一次抽到次品的条件下, 第二次抽到次品的概率.

- $P(B|A) = P(B|A^c) = P(B) = M/N;$

- $P_C(B|A) = \underbrace{(M-1)/(N-1)} < M/N = P_C(B).$

- 直观: $P(B|A) = P(B)$, A 发生(与否)不改变 B 的概率.
- 定义1.8.2. 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B (在概率 P 下)相互独立.

- 正相关: $P(AB) \geq P(A)P(B).$
负相关: $P(AB) \leq P(A)P(B).$

例1.8.4. “石头、剪刀、布” 游戏.

$A =$ “甲出剪刀”, $B =$ “乙出布”, $C =$ “甲赢”.

$(0, 0)$ $(0, 2)_C$ $(0, 5)_B$

● 样本: $(2, 0)_A$ $(2, 2)_A$ $(2, 5)_{A,B,C}$

$(5, 0)_C$ $(5, 2)$ $(5, 5)_B$

● A, B, C 两两独立:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3},$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{9}.$$

● 但 $P(C|AB) = 1$.

● 补: $P(C|AB) = P(C) \Leftrightarrow P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

- 定义1.8.5. 三个事件. 两两独立.

又若 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, 则称它们相互独立.

- 定义1.8.6. n 个事件. 两两独立.

若 $\forall k \leq n, \forall 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n,$

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称它们相互独立.

- 定义1.8.7. 一列事件两两独立.

若 $\forall n \geq 2, A_1, \cdots, A_n$ 相互独立, 则称 $A_1, A_2, \cdots$ 相互独立.

- 总结: 两两独立指 $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), \forall i \neq j$;

相互独立指任意有限个事件交集的概率= 概率的乘积.

- 设 $A_1, \dots, A_n$ 相互独立, 则
 - B_i 取 A_i 或 A_i^c , 则 $B_1, \dots, B_n$ 相互独立;
 - $\forall 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ 相互独立;
 - $(A_1 A_2), A_3, \dots, A_n$ 相互独立;
 - $(A_1 \cup A_2), A_3, \dots, A_n$ 相互独立.
- 独立性的应用:
 - 一、验证独立性;
 - 二、假设独立性.

二、相互独立的小试验

- n 个(小)试验:

$(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$: 第 i 个小试验, $i = 1, \dots, n$.

- 大试验的样本空间:

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, \quad \omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n).$$

- 关于第 i 个小试验的事件: $\forall \tilde{A}_i \in \mathcal{F}_i$,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i \hookrightarrow A_i &= \{\omega : \omega_i \in \tilde{A}_i\} \\ &= \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times \tilde{A}_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n. \end{aligned}$$

- 例1.8.4. “石头、剪刀、布” 游戏. $\Omega_1 = \Omega_2 = \{0, 2, 5\}$.

甲出剪刀: $\tilde{A}_1 = \{2\} \hookrightarrow A_1 = \{(2, 0), (2, 2), (2, 5)\}$.

- 大试验中的 σ 代数:

$$\mathcal{F} = \sigma(\{\mathbf{A}_i : \tilde{A}_i \in \mathcal{F}_i, 1 \leq i \leq n\}).$$

- 大试验中的概率(乘积概率测度):
($\Omega, \mathcal{F}$) 上存在唯一的概率 P 满足:

- (1) 与小试验相容:

$$P(\mathbf{A}_i) = P_i(\tilde{A}_i), \quad \forall \tilde{A}_i \in \mathcal{F}_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

- (2) 小试验相互独立: $\forall \tilde{A}_i \in \mathcal{F}_i, \quad 1 \leq i \leq n,$

$$P(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n) = \prod_{i=1}^n P(\mathbf{A}_i), \quad P(\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_n) = \prod_{i=1}^n P_i(\tilde{A}_i).$$

- 相互独立的小试验指($\Omega, \mathcal{F}, P$).
- 相互独立的一系列小试验类似.

例1.8.12. 将 n 位女生与 m 位男生随机排成一列. 研究独立性.

- 模型: 三个相互独立的小试验, $|\Omega| = C_{n+m}^n \cdot n! \cdot m!$.

- 将男生视为隔板,
女生视为可分辨的球.

- $\Omega_1 \times \Omega_2$ 翻译为
将 n 个可分辨的球
放入 $m+1$ 个盒子中.
如何放?

字符串	001	010	100
混排	①②	① ②	①②
	②①	② ①	②①
可分辨	①②	① ②	①②
		② ①	

- 例. $m = 1, n = 2$.

- $A_i =$ “第 i 个球在第一个盒子中”. $P(A_i) = \frac{1}{m+1},$

$$P(A_1 A_2) = \frac{2}{(m+2)(m+1)} > P(A_1)P(A_2).$$

三、重复独立试验

例1.8.13. 成功率为 p 的伯努利(Bernoulli)试验: 抛硬币.

- ω : 无穷长(或有限长)的H-T 字符串.

$$H_n = \text{“第}n\text{次为H”}, \quad T_n = H_n^c.$$

- $B_N = \bigcup_{n=1}^N H_n \nearrow B = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. $P(B) = 1$:

$$P(B_N) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^N T_n\right) = 1 - (1-p)^N \nearrow 1.$$

- (重复试验中)正概率事件一定(几乎必然)发生.
- 以概率1, 所有单词都出现.

例1.8.14. 设小试验中事件 E, F 不相容, 概率分别为 p, q , 均为正. 求重复独立试验中事件 $B = “E \text{ 先发生}”$ 的概率.

- $E_n = “第n \text{ 次小试验中} E \text{ 发生}” ; F_n; G_n = E_n \cup F_n.$
- $A_n = G_1^c \cdots G_{n-1}^c G_n, P(A_n) = (1 - p - q)^{n-1}(p + q).$
- $B_n = BA_n = G_1^c \cdots G_{n-1}^c E_n, P(B_n) = (1 - p - q)^{n-1}p.$
- $P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \frac{p}{p + q}.$
- B 与 A_n 独立:

$$P(BA_n) = P(B)P(A_n).$$